

多面体を角材で作る

— 建築科と数学科のコラボレーション —

石川県 金沢市立工業高等学校 森下 公博

1 研究の趣旨

本校は1928(昭和3)年に、機械科、電気科、建築科、土木科の4科で創立した。第2次大戦中は航空科、戦後は家庭科等、色々な学科改変があったが、現在は機械科、電気科、電子情報科、建築科、土木科と、創立当時とほとんど変わらない学科編成に落ち着いている。

カリキュラムについて、2,3年次は各科とも専門コースと数英コースが設定されている。両コースとも数年前までは、普通教科の時間数は全科で同一だったが、現在は学科ごとに多少の違いがある。1年次の標準的な数学のカリキュラムは数Ⅰを3単位、数Aを2単位。標準的な専門コースでは、2年次に数Ⅱを2単位、3年次に数Ⅱを2単位。標準的な数英コースは、2年次に数Ⅱを4単位、3年次に数Ⅲを4単位である。電子情報科では両コースともに2年次に数Bを2単位分実施する。

下の写真は建築科の生徒が2008年に第40回技能オリンピック全国大会建築大工部門に出場したときの課題作品。



この作品では、切り口がひし形の角材どうしを斜めに繋ぐほぞ穴の寸法を出して、加工している。これは、金沢城の石川門石川櫓や五十間長屋菱櫓にも使われている技法で、規矩術と言われる。このような技術を学んでいる生徒に、是非多面体を作ってもらいたいと考えた。

本稿は、多面体に係る「実験」の報告である。

2 研究の概要

(1) 正多面体の墨付け

正4面体から全てが始まる。正4面体は合同な部材6本から成る。その両端を切り落とすための墨付けに必要な長さは二つ。図1のA2G、以下、側部長(Side Length)とA3A6、以下、下部長(Under Length)の二つ。この内、下部長はすぐわかる。図1を垂直切り出し図と呼ぶことにする。

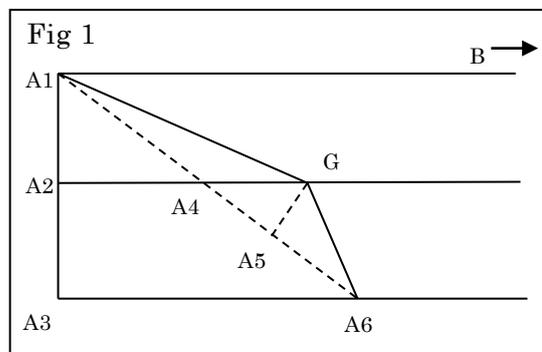


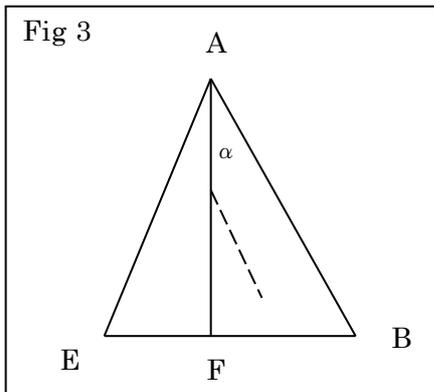
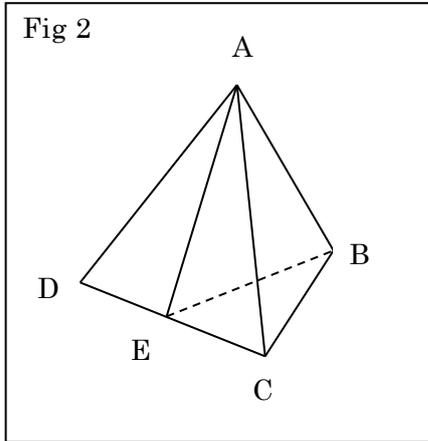
図2のような正4面体ABCDを考える。辺DCの中点をEとし、3角形AEBを考える。図3で頂点Aから辺BEに下した垂線の足をFとし角BAFを α とすると、簡単な計算で

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{となる。}$$

この α は図1の角BA1A6でもある。この角度を垂直接合角(Vertical Joint Angle)と呼ぶことにする。角材の通常の断面が正方形として、その1辺をMとする。図1で、

$$A1A3 = \sqrt{2}M \quad \text{また} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従}$$

って、 $A3A6 = \sqrt{2}A1A3 = 2M$ が求まる。



問題は図 1 の側部長 $A2G$ である。この長さを最初はいい加減に決めて作ってみたが全くだめで、どうしても正しい値を求めることが必要になった。ネットで調べたが、説明なしに何処かの角度を示したものはあるが長さの記載がない。仕方なく自分で求めることにした。

$A2G$ の長さを求めるために、図 4 を考える。底面 3 角形 BCD に平行かつ点 A に接する平面に正 4 面体を投影したものである。これを**水平接合図**と呼ぶことにする。

各頂点に 3 本の部材が集まる正 6 面体、正 12 面体でも同じ図になる。角 $G2AG3$ を θ とする。この角を**水平接合角 (Horizontal Joint Angle)**と呼ぶことにする。正 4 面体、正 6 面体、正 12 面体では、水平接合角はすべて 60 度である。 $AG2$ を**接合深さ (Joint Depth)**と呼ぶことにする。これが垂直切り出し図 1 と水平接合図 4 を繋ぐ重要な値である。

$$G1G3 = \sqrt{2}M \quad \frac{G1G2}{AG2} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{である}$$

ので、 $AG2 = \frac{G1G2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}M$ となる。これが

図 1 の $A5G$ と同じ長さであることと、3 角形の相似を使って次の値が求まる。

$$A2G = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M \doteq 1.71M$$

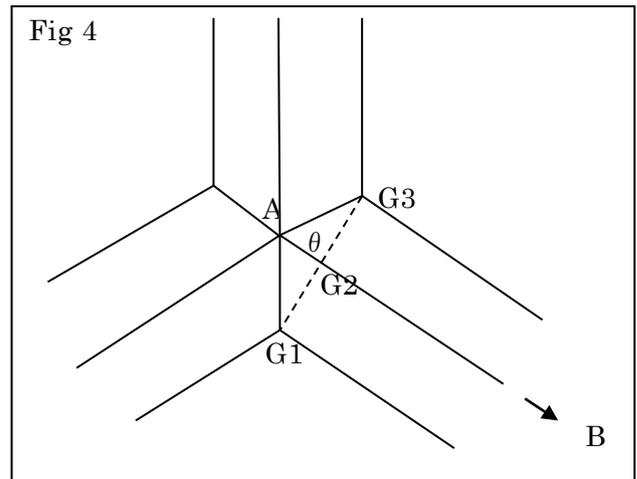


写真 1。木材加工実習の廃材で作った正 4 面体。1 辺の長さ $L=77\text{cm}$ $M=10.5\text{cm}$



正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体も殆ど同様にして、角材の墨付けの寸法が求められる。

図 5 は正 8 面体の水平接合図で、水平接合角も垂直接合角も 45 度。従って、接合深さ t は

$$t = \frac{M}{\sqrt{2}} \quad \text{となる。}$$

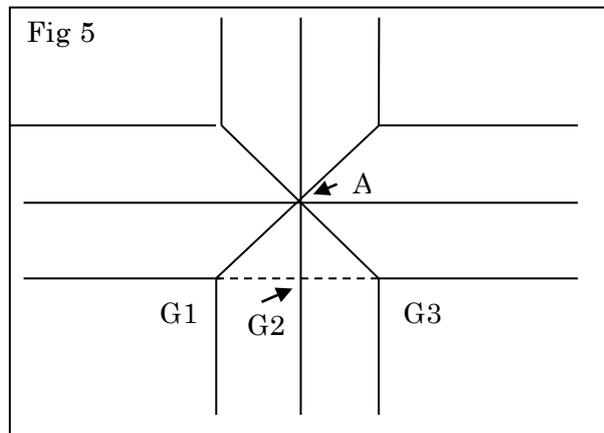
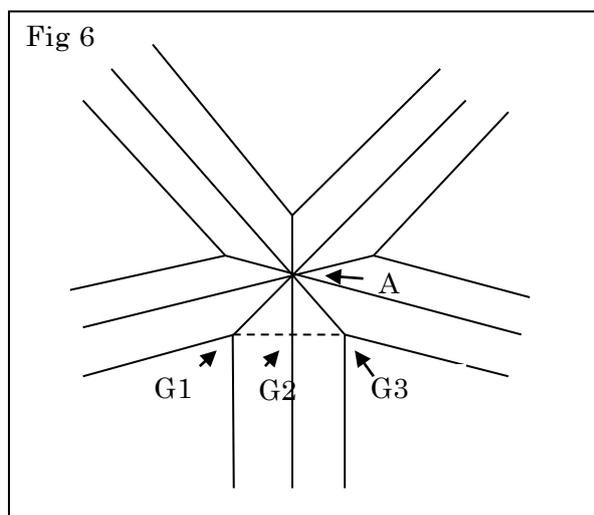


図 6 は正 20 面体の水平接合図で水平接合角 θ は 36 度すなはち $\frac{\pi}{5}$ 。これらの値を用いて求めた下部長と側部長は最後にまとめて表にした。



(2) フラーレンの墨付け

正多面体の部材はすべて合同だったが、フラーレンの部材は 2 種類ある。下の図で、2 つの 6 角形に挟まれる部材 P すなはち辺 AB と、6 角形と 5 角形に挟まれる部材 Q すなはち辺 AC の長さは等しく、垂直接合角も等しいが、水平接合角は異なる。言い換えると、部材 P と Q の下部長は等しいが、部材 P と Q の接合部の側部長は同一。しかし、部材 Q どちらの接合の側部長は上より長くなる。簡単に言えば部材 P は左

右対称だが、部材 Q は左右非対称になる。

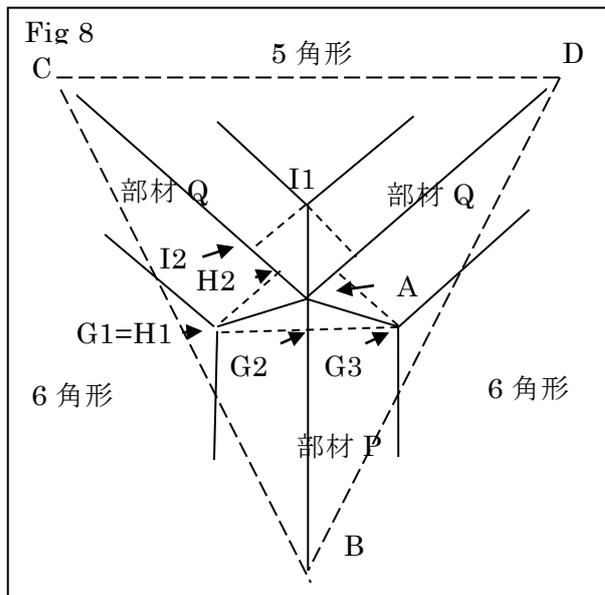
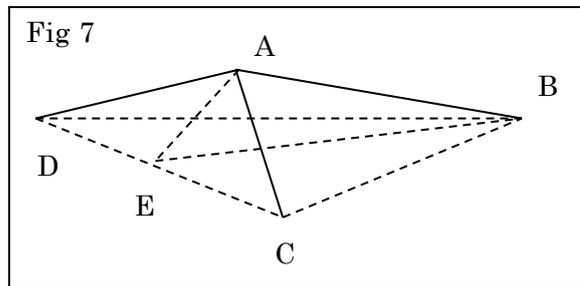
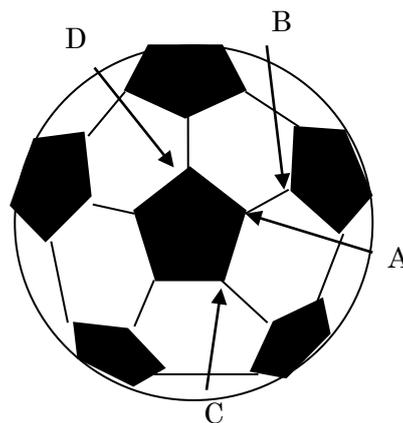


図 8 は 4 面体 ABCD の水平接合図で、部材 P と部材 Q の接合の様子を示したもの。接合深さ AG2 と AH2 は等しいが、AI2 はそれらより長いことがわかる。

これら部材の側部長、下部長を求める計算で素数 109 の、代数的整数を用いた「因数分解」が 3 通り表れた。109 の「因数分解」は何通りも可能だが、この計算では次の 3 種類だけが現れる。これらも共軛数という。

$$\begin{aligned}
109 &= (17 - 6\sqrt{5})(17 + 6\sqrt{5}) \\
&= \left(\frac{21 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{21 + \sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{429 - 73\sqrt{5}}{2 \times 19}\right)\left(\frac{429 + 73\sqrt{5}}{2 \times 19}\right)
\end{aligned}$$

これは、1辺が1の正五角形の対角線の長さ

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が実2次体 $Q(\sqrt{5})$ の基本単数であること

が関係しているようだ。類体論まで話がつながりそうである。

工業と数学の違いは数値の表し方にある。工業では小数で表すところを、数学では代数的整数を用いて表す。代数的整数を通して見ると別な深い真実が見えて来るかもしれない。

(3) さんフェアのモニュメント

第26回全国産業教育フェア石川大会(以下、さんフェア)のモニュメントとして、不等辺正3角錐を作ることになった。写真1の正4面体を職員室に飾っておいたところ、さんフェアの担当の先生の眼にとまったらしい。底面は1辺Lの正3角形、側面は各辺がkL kL Lの2等辺3角形のものを考える。この計算をしておけば、正4面体、正6面体、正12面体の計算はkの値を変えるだけで求められることに後で気が付いた。

さんフェアのモニュメントは $k=2$ $L=2.5m$

$M=10.5cm$ にした。下部長は $\sqrt{22}M \doteq 4.69M$ 、

側部長は $\left(\frac{\sqrt{22}}{2} + \sqrt{2}\right)M \doteq 3.76M$ とかなり

鋭くなり、切削には苦勞した。高さは約4.9m、重量は全体で約200Kgになるので、底辺は単純な設計にし、組み立てやすくかつ、上部の重量に耐えられるものにした。上部と下部の接合部分は多少複雑だが、割と安定したものになった。勿論、これ程の大きさのものになると、他の人の協力がなくては実現不可能である。

次は試作品1号の写真。L=46cm M=40mm k=2 これなら一人でも作れる。



(4) 工業科の先生方の協力

建築科生徒による本番品の製作。



工業高校には、民間企業で働いてから工業科の教員になった人が少なくない。それらの先生から、現場で苦勞した話を聞くことがよくある。今回は、まず試作品1号の材料を元プロの1級建築士でもある建築科の先生に、木材加工実習の廃材を製材し直して用意してもらった。試作品の接合はコーススレッド(長いねじくぎ)で十分だったが、本番品の接合には、ボルトや金属プレートなどの木造建築用接合金物を使っても

らった。それ以外にも多くの工業科の先生から様々なアドバイスや協力が得られたことは、工業高校ならではのものである。生徒諸君の力も大いに借りた。

枠組み足場を使った本番品の仮組。



3 成果・課題・謝辞

多面体を構成する部材の墨付け寸法

対象と構成	下部長	側部長
正 4 面体 正 3 角形 4 面 部材 6 本	$2M$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M$ $\doteq 1.71M$
正 6 面体 正方形 6 面 部材 12 本	M	M
正 8 面体 正 3 角形 8 面 部材 12 本	$\sqrt{2}M$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)M$ $\doteq 1.71M$
正 12 面体 正 5 角形 12 面 部材 30 本	$\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}M$ $\doteq 0.54M$	$\frac{\sqrt{2}}{2}M$ $\doteq 0.71M$

正 20 面体 正 3 角形 20 面 部材 30 本	$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}M$ $\doteq 0.874M$	$\frac{\sqrt{10}}{2}M$ $\doteq 1.581M$
不等辺 3 角 錐(頭頂部) 側面 2:2:1 底面 1:1:1	$\sqrt{22}M$ $\doteq 4.69M$	$\left(\frac{\sqrt{22}}{2} + \sqrt{2}\right)M$ $\doteq 3.76M$

フラレーン等については、次の場所にある PDF ファイルをご参照ください。これらの設計と製作の詳細をまとめてあります。

<http://www.shiko-th.ed.jp/math/>

正 4 面体は部材は 6 本だが、正 6 面体と正 8 面体は 12 本、既に「手」が足りない。ましてや正 12 面体と正 20 面体は 30 本、フラレーンは 2 種類 90 本の部材を「作って」、「組み立て」ないとイケない。いつかは建築科の課題研究でフラレーンの上半分のドームだけでも作ってほしいと願っている。

面白半分で始めた正多面体作りが、さんフェアのモニュメントとして高さ 4.9m のタワーにまでなったのは全くの幸運であった。さんフェアを企画、出資して頂いた石川県当局および、準備、運営、後始末に奔走、協力して頂いた多くの先生方、生徒諸君に感謝します。

2016 年 11 月、石川県産業展示館 4 号館、さんフェア会場にて。



[EOF]